Konferanse om de nye læreplanene i matematikk i videregående skole, 5-6. oktober 2000 Tromsø

Anne Bruvold
Skolelaboratoriet i realfag
Det matematisk- naturvitenskapelige fakultet
Universitetet i Tromsø

Anne.Bruvold@matnat.uit.no

Denne teksten er ikke en fullstendig beskrivelse, spesielt den siste delen gir noen tall og eksempler uten å være utfyllende.

Kjeglesnitt

Kort historikk

Menaikhmos (380-320 fKr)

Oppdaget kjeglesnittene og viste at man kunne lage kurver ved å lage plane snitt gjennom en kjegle

Arkimedes (287-212 fKr)

Utførte arealberegninger med kjeglesnitt.

Appolonius (260-190 fKr)

Skrev flere bøker om kjeglesnitt. Innførte navnene
ellipse - utelatelse
parabel - liknelse
hyperbel - overdrivelse

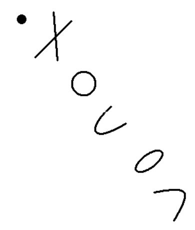
Kepler (1571-1630)

Oppdaget at planetene beveger seg i elliptiske baner.

Descartes (1596-1650)

Andregradslikninger med to variable danner altid en av sju kategorier:

1. punkt
2. en eller to rette linjer
3. sirkel
4. parabel
5. ellipse
6. hyperbel
7. ingen graf

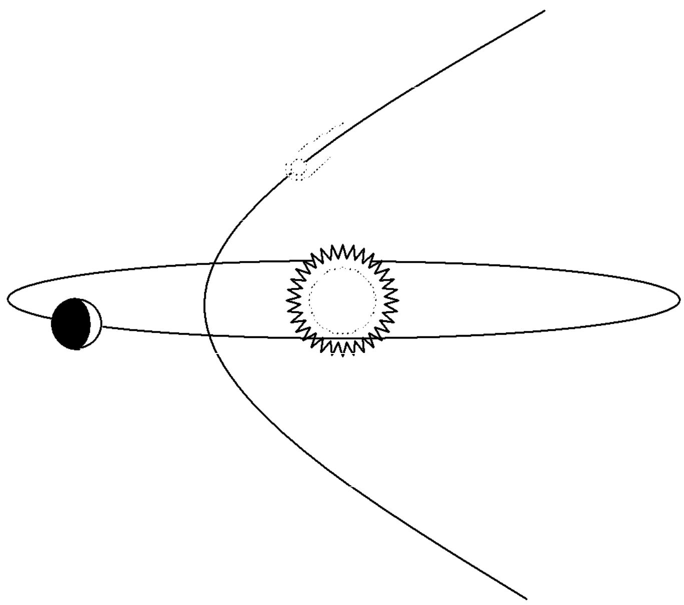


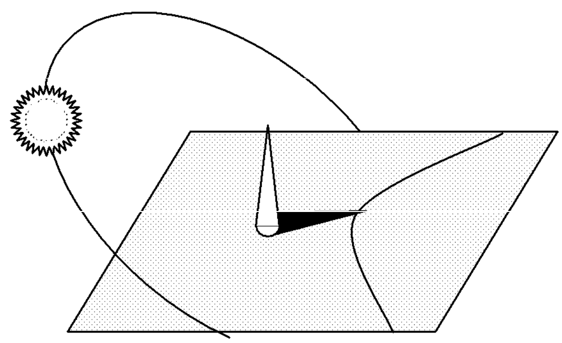
Hvor finner vi kjeglesnitt i naturen?

Planet, satellitt og kometbaner

Planeter, naturlige og kunstige satellitter og kometer følger baner som er ellipse- parabe- eller kjegleformede.

Parabolsk hastighet er den hastigheten som må til for (så vidt) å slippe at av gravitasjonsfeltet. Hyperbolsk hastighet er hastigheten til noe som ikke er gravitasjonelt bundet til massen i sentrum, eks kometer som kommer innom solsystemet en gang.



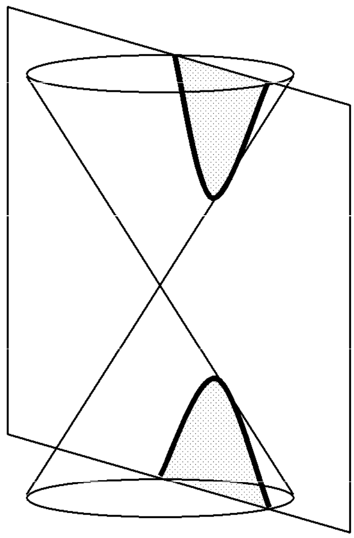


Skyggen av en påle gjennom dagen

I løpet av en solrik dag vil tuppen av en påle kaste en skygge formet som hyperbel, parabel eller ellipse

Hvordan lage kjeglesnitt?

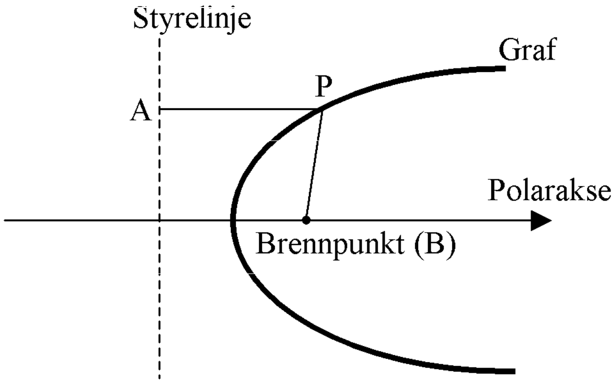
Snitte en sirkulær dobbelkjegle



Ellipse - fra vinkelrett på aksen (sirkel) til parallelt med kjeglens sidekant
Parabel - parallell med kjeglens sidekant
Hyperbel - fra parallell med kjeglens sidekant til parallell med aksen
Punkt - gjennom toppunktet til kjeglene
En linje - parallelt med sideflaten og gjennom toppunktet
To kryssende linjer - vinkelrett på grunnflaten og gjennom toppunktet

Matematisk / konstruksjon

Gå ut fra en fast linje, *styrelinjen*, og ett punkt, *fokus* eller *brennpunkt*, og velg et positivt tall *e*, *eksentrisiteten*. Mengden av alle punkter *P* i planet der avstanden til brennpunktet og avstanden til styrelinjen danner brøken *e*, danner et kjeglesnitt.

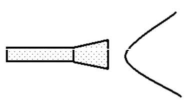


$$\frac{PB}{AP} = \text{konstant} = e$$

$e = 0$ sirkel
$0 < e < 1$ ellipse
$e = 1$ parabel
$1 < e$ hyperbel

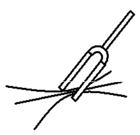
Kjeglesnitt med lik eksentrisitet er formlike

Lommelykt



Strålebunten ut fra en lommelykt er som regel kjegleformet. Ved å holde lykten i forskjellige vinkler i forhold til en flate får vi ellipser, parabler og hyperbler.

Stemmegaffel i vann



Knutelinjene som oppstår når man holder en stemmegaffel i vann danner hyperbler.

Matematiske formler

Generell formel for andregradslikninger: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

Fortegnet til $B^2 - 4AC$ bestemmer formen til grafen

$B^2 - 4AC < 0$ gir ellipse, sirkel, punkt eller ingen kurve

$B^2 - 4AC = 0$ gir parabel, 2 parallelle linjer, en linje eller ingen kurve

$B^2 - 4AC > 0$ hyperbel en linje eller to kryssende linjer

Leddet Bxy roterer grafen.

Med B = D = E = 0 fås $y = \pm\sqrt{\frac{-F}{C} + \frac{-A}{C}x^2}$ - ellipse

Med $B = C = 0$ fås $y = \frac{-A}{E}x^2 + \frac{-D}{E}x + \frac{-F}{E}$ - parabel

Med $A = C = E = 0$ fås $y = \frac{-D}{B} + \frac{\frac{-F}{B}}{x}$ - hyperbel

Formler når aksen ligger langs x-aksen

For nærmere beskrivelse, se "Mer om - ..."

Ellipse: $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$

Parabel: $4py = x^2$, $p/2$ er avstanden mellom toppunkt og brennpunkt

Hyperbel: $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

Mer kjente formler i videregående skole

Ellipse: $y = \pm\sqrt{b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2}$ $\quad$ $a = b = r$ gir en sirkel.

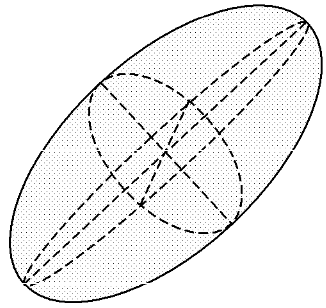
Parabel: $y = ax^2 + bx + c$ $\quad$ $x = \frac{-b}{2a}$ er symmetriaksen

Hyperbel: $y = a + \frac{b}{x}$

NB! a, b og c er her andre størrelser enn brukt ellers i teksten.

Tre dimensjoner

Ellipsoide



Rotasjons ellipsoide

Flaten som oppstår når en ellipse roteres om en av sine akser.

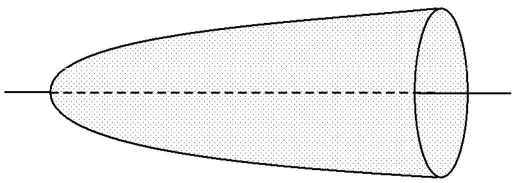
Generell ellipsoide

Plane snitt gjennom ellipsoiden gir ellipser.

Formel: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Volum: $V = \frac{4}{3}\pi abc$

Paraboloide



Elliptisk paraboloide

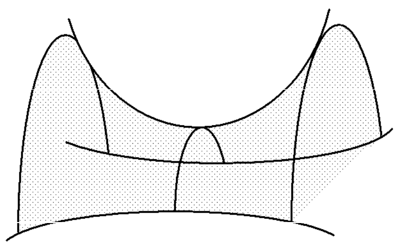
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2cz$ (c<0)

Plan parallelt med x-y planet skjærer paraboloiden langs formlike ellipser.

Rotasjons paraboloide

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 2cz$ (c>0)

Plan parallelt med x-y planet skjærer paraboloiden langs sirkler.



Hyperbolsk paraboloide

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2cz$ (c>0)

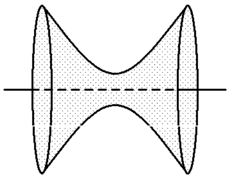
Sadelformet. Snitt parallelt med x-z planet og y-z planet danner omvendte parabler.

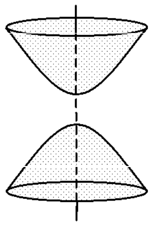
Hyperboloide

Rotasjons hyperboloide

Enkappet

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$





Tokappet

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

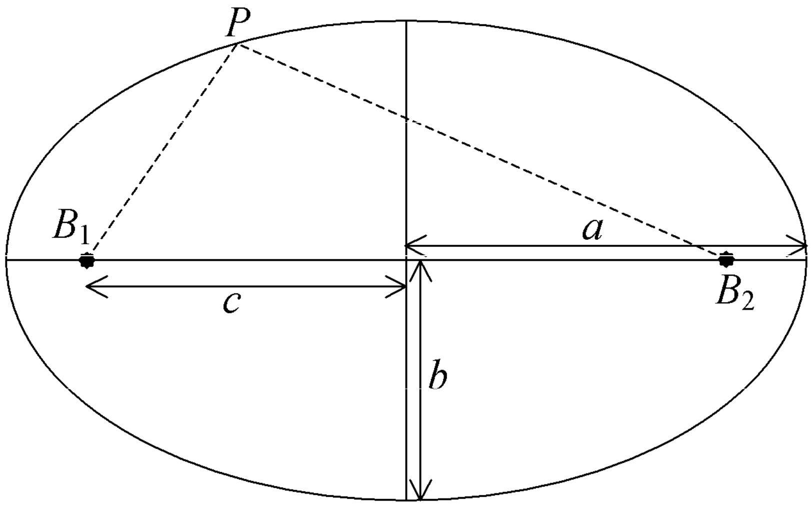
Mer om - ellipser

Nomenklatur

a - store halvakse
b - lille halvakse
c - avstand sentrum – fokus
B_1 og B_2 fokus / brennpunkt

$$c = ae = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$B_1P + B_2P = \text{konstant}$$



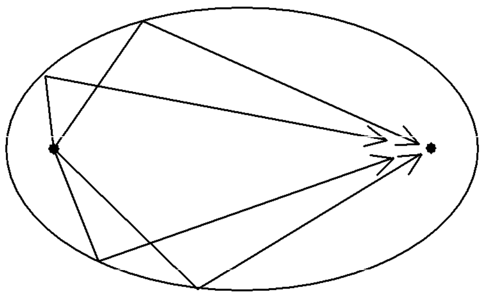
Refleksjonsegenskaper

Stråler sendt ut fra ett fokus reflekteres til det andre fokuset.

Bruksområder

Fra ett fokus til et annet

Egnet dersom noe sendes ut fra ett fokus og skal til et annet.



Belysning

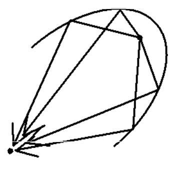
Tannlegelys

Lys produseres i ett fokus. Lampens elliptiske form gjør at reflektert lys fokuseres i pasientens munn.

Medisin

Nyrestein knuser (Extracorporeal shock wave lithotripsy)

(extracorporeal lithotripsy - utenomkroppslig steinknusing)



Pasienten senkes ned i vann. En elektrode i fokus av en ellipsoide danner en sjokkbølge som fokuseres på nyrestein inne i kroppen. Steinen knuses og kommer ut av seg selv.

Behandling av smerter i hel
Fant argumenter for at dette var bedre enn operasjon, men ingen beskrivelse av virkemåte.

Romfart
Satellitter beveger seg i ellipseformede baner.

Den mest energisparende overføringsbane fra jorda til en annen planet er en ellipse med jorda i ett toppunkt og den andre planeten i det andre.

Mekanikk
Elliptiske gir/tannhjul. Variatorsystemet i snøskutere?

Byggverk
Steinbruer bygges ofte i som halve ellipser.

Teknisk tegning
Sirkler sett fra siden er ellipser

Optikk
Speilteleskop.

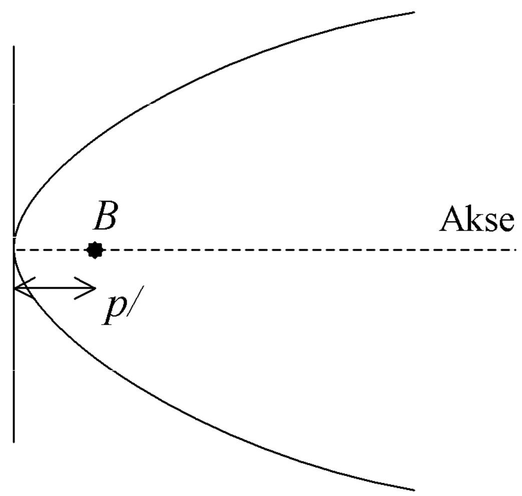
Arkitektur
Hviskegaleri. Rom med ellipseformede tak hvor du kan stå og hviske i et fokus og det høres i det andre. Eksempel: Nasjonalteateret stasjon.

Mer om – parabler

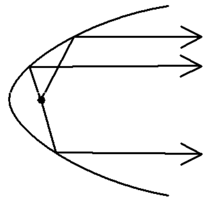
Nomenklatur

B – fokus / brennpunkt
$p/2$ - avstanden fra toppunkt til

Sammenheng mellom x, y og p
(for liggende akse): $y^2 = 2px$

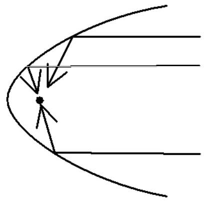


Refleksjonsegenskaper



Fra fokus til parallelt med aksen eller omvendt.

Bruksområder



Romfart

Banen til en romsonde som skal unnslippe jorda eller sola må minimum ha en parabolsk bane.

Romforskning

Astronomiske teleskop og radioteleskop.
Parallelle elektromagnetiske bølger (eks. lys eller radiobølger) fokuseres i brennpunktet og registreres av kamera eller annen mottaker.

Sending av radiobølger
Parabolske sendere sender radiobølger ut i verdensrommet til romsonder eller som radar. Signalene går fra en sender i brennpunktet og reflekteres ut i en strålebunt med parallelle stråler i en retning.

Utforsking av den øvre atmosfære
Mikrobølger sendes ved hjelp av en parabolantenne ut i den øvre atmosfære. Effekten av dette registreres på bakken. Dette danner grunnlaget for forskningsaktiviteten på EISCAT.

Kommunikasjon

Antenner for mottak av signaler fra satellitter er (som regel) parabolformet. Antenner for sending av signaler i en bestemt retning er parabolformet.

Kast / prosjektiler

Objekter som kastes og prosjektiler som skytes ut følger en parabolsk bane.

Energiproduksjon

Solovner fokuserer sollys i et brennpunkt. Væske (vann) fordamper og driver en turbin.

Byggverk

Kablene i hengebroer henger i en (tilnærmet) parabel form.

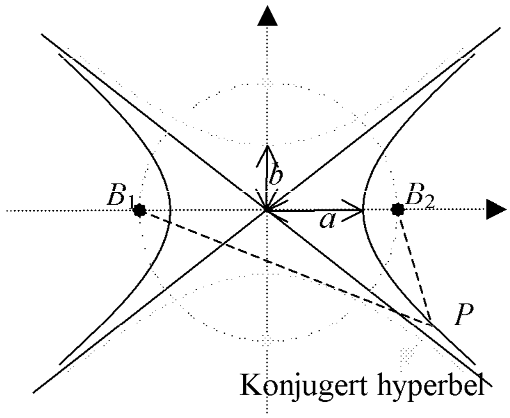
Mer om - hyperbler

Nomenklatur

$2a$ – transversalakse
$2b$ – konjugatakse
B_1 og B_2 – brennpunkt / fokus

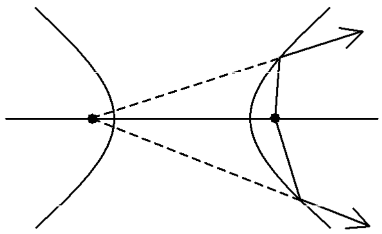
$$c = ae = \sqrt{a^2 + b^2}$$

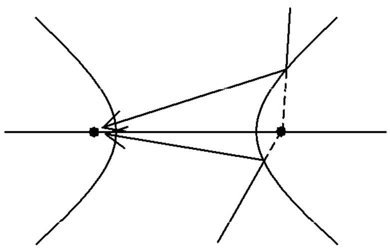
$$|PB_1 - PB_2| = \text{konstant} = 2a$$



Refleksjonsegenskaper

Fra innsiden
Lysstråler sendt ut fra ett fokus reflekteres og ser ut som om de kommer fra det andre.





Fra utsiden
Lysstråler sendt inn mot det ene fokus reflekteres mot det andre.

Bruksområder

Romfart

Romsonder som skal forlate jorda eller sola, bør ha en hyperbolsk bane.

Romforskning

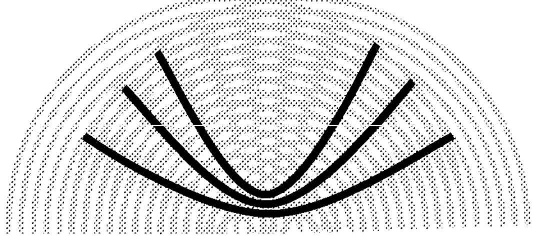
Teleskoplinser

Mekanikk

Girdesign. Dreiing av koniske gir/tannhjul?

Navigasjon

(Hyperbelnavigasjon) Interferensmønsteret fra to radiosendere gi hyperbelformede knutelinjer. Ved å finne ut hvilken knutelinje man er på (i forhold til minimum tre sendere), kan man finne ut hvor man er.

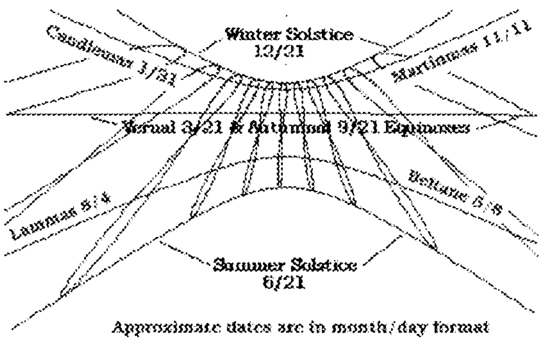


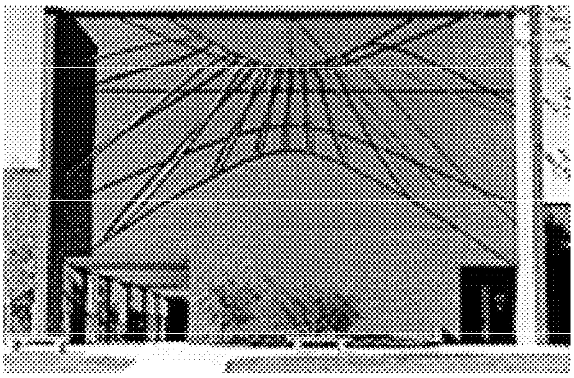
Mer om - solgangen og skygger

Hvis jorda var gjennomsiktig, ville sola beskrive en sirkel på himmelen i løpet av en dag. Lys fra sola inn mot toppen av en påle vil beskrive en sirkulær kjegle med pålen som toppunkt, alle dager utenom jevndøgnene. Skyggen av toppen vil også beskrive en kjegle med pålen som toppunkt. Disse vil til sammen være en dobbelt sirkulær kjegle. Ethvert plan gjennom denne dobbeltkjeglen vil snitte kjeglen i en kurve formet som et kjeglesnitt.

På flere solur kan man se kurver formet som kjeglesnitt. Hvilken kurve skyggen faller på er avhengig tiden på året. Når det er midnattssol vil skyggen tegen en ellipse.

Eksempel fra University of Winsconsin – River Falls.





Himmellegemer – noen tall

Med forbehold om trykkfeil

Solsystemet

1AE = $149{,}6 \cdot 10^6$ km

Planet	Store halvakse (AE)	Periode døgn (år)	Banens eksentrisitet
Merkur	0,3871	87,97 (2,408)	0,206
Venus	0,7233	224,70 (0,615)	0,007
Jorda	1,0000	365,26 (1,000)	0,017
Mars	1,5237	686,98 (1,881)	0,093
Jupiter	5,2028	4 332 (11,86)	0,048
Sarturn	9,588	(29,46)	0,056
Uranus	19,191	(84,07)	0,046
Neptun	30,061	(164,8)	0,010
Pluto	39,529	(278,6)	0,248

Satelitt	Midlere avstand (km)	Periode (døgn)	Banens eksentrisitet
Månen	384 404	27,332	0,055
Io	421 600	1,769	0,000
Europa	670 900	3,551	0,000
Ganymede	1 070000	7,155	0,002
Callisto	1 880 000	16,689	0,008
Titan (Sirius)	1 222 000	15,945	0,029
Nereid (Neptun)	5 560 000	359,881	0,749

Asteroider

Asteroide	Minste avstand (AE)	Største avstand (AE)	Midlere avstand (AE)	Periode (år)	Banens eksentrisitet
Ceres			2,767	4,61	0,097
Pallas			2,771	4,61	0,180
Vesta			2,362	3,63	0,097
Amun	0,701	1,247	0,974	0,961	0,280
Aten	0,790	1,143	0,966	0,950	0,183
Khufu	0,526	1,453	0,990	0,985	0,469
Hephaistos	0,357	3,972	2,135	3,185	0,835

Kometer

Komet	Observert	Perihel (AE)	Periode (døgn/år)	Banens eksentrisitet	Neste gang
Encke	1786	0,341	3,31	0,846,	1990
Halley	?	0,587	76,0	0,967	2061
West	1976	0,197	-	1,00	
Hyakutake	1996	0,230	14 000	> 0.999784	
Hale-Bopp	1997	0,914	2380	0,995	

Andre solsystemer

Stjerna					Planeten			
Navn	**Stjerne bilde**	**Type**	**Magni-tude**	**Avst (ly)**	**Minimum masse (Jupiter=1)**	**Bane radius (AE)**	**Periode (døgn)**	**Banens eksentrisitet**
HD 38529	Orion	G4	5,95	137	0,77	0,13	14,3	0,27
HD 6434	Phøniks	G3	7,72	130	0,48	0,15	22,09	0,3
HD 83443	Seilet	K0	8,23	141	0,15	0,17	29,83	0,42
HD 121504	Kentauren	G2	7,54	145	0,89	0,32	64,62	0,13
HD 12661	Væren	G6	7,43	120	2,8	0,80	250	0,33
HD 92788	Sekstanten	G5	7,31	105	3,7	0,98	341	0,44
HD 19994	Hvalfisken	F8	5,07	72	1,8	1,3	454,2	0,2
HD 190228	Reven	G5	7,30	200	5,0	2,3	1,127	0,43
ε Eriadni	**Floden**	**K2**	**3,73**	**10,5**	**0,8**	**3,2**	**2 520**	**0,6**

Litt om - teleskop

Reflektorer

Teleskop hvor lyset fokuseres ved hjelp av speil kalles reflektorer. Teleskop hvor lyset fokuseres ved hjelp av linser kalles refraktorer. Denne listen viser kjeglesnitt brukt som speil i reflektorer av forskjellig type. Primærspeilet er det største speilet som reflekterer lyset over i sekundærspeilet. Til sammen fokuserer disse lyset inn i ett eller annet instrument for registrering av lys, f.eks et kamera.

Type	**Primærspeil**	**Sekundær speil**
Cassegrain	Paraboloide	Konveks hyperboloide
Ritchey-Chrétien	Hyperboloide	Konveks hyperboloide
Dall-Kirkham	Ellipsoide	Konveks sfære
Gregoriansk	Paraboloide	Konkav ellipsoide
Aplamatisk - Gregoriansk	Ellipsoide	Konkav ellipsoide
Couder	Hyperboloide	Konkav ellipsoide

Ikke- Euklidsk geometri

Elliptisk geometri: Mindre enn en - ingen

Gitt en rett linje l og et punkt P utenfor linja. Det kan ikke trekkes noen linje parallell med l gjennom P.

Parabolsk geometri: En

Gitt en rett linje l og et punkt P utenfor linja. Det kan trekkes en og bare en linje parallell med l gjennom P.

Hyperbolsk geometri Mer enn en

Gitt en rett linje l og et punkt P utenfor linja. Det kan trekkes uendelig mange linjer parallelle med l gjennom P.

Oppsummering (formler ol)

Etter http://www.sisweb.com/math/algebra/conics.htm

Kurve	Sirkel	Ellipse	Parabel	Hyperbel
Likning (horisontal akse)	$x^2 + y^2 = r^2$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$4px = y^2$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
Asymptote likning				$y = \pm\frac{b}{a}x$
Likning (vertikal akse)	$x^2 + y^2 = r^2$	$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$	$4py = x^2$	$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$
Asymptote likning				$x = \pm\frac{b}{a}y$
Funksjoner	$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$	$y = \pm\sqrt{a^2 - \frac{a^2x^2}{b^2}}$	$y = \frac{1}{4p}x^2$	$y = \pm\sqrt{a^2 + \frac{x^2}{b^2}}$ rotert: $y = a + \frac{b}{x}$
Variable	r = sirkelens radius	a = store halvakse b = lille halvakse c = avstanden fra sentrum til fokus	p = avstanden fra toppunkt til fokus	a = halve lengden av storaksen b = halve lengden av lilleaksen
Eksentrisitet	0	c/a	c/a	c/a
Fokus	p = 0	$a^2 - b^2 = c^2$	p = p	$a^2 + b^2 = c^2$
Definisjon: mengder av punkter som...	avstanden til sentrum (origo) er konstant	summen av avstandene til hvert fokus er konstant	avstanden til fokus = avstanden til styringslinja	differansen mellom avstandene til hvert fokus er konstant

Bøker – noen kilder

Aschehougs og Gyldendals *Store norske leksikon*
Kunnskapsforlagets *Matematikkleksikon*
Jan Gullberg, *Mathematics. From the Birth of Numbers*, 1996, WW Northon & Company

Internett – noen linker

MacTutor History of Mathematics archive

Matematikkens historie
Hovedside:
http://www.math.bme.hu/mathhist/

Kort beskrivelse av matematikere:
http://www.math.bme.hu/mathhist/Mathematicians/

June Jones, *Instructional Unit on Conic sections*, University of Georgia
http://jwilson.coe.uga.edu/emt669/Student.Folders/Jones.June/conics/conics.html

Extracoproreal Shock Wave Lithotripsy, Burlington Urological Association:
http://www.bua-pa.com/extracorporeal.html

Solur: http://www.sundials.co.uk/

Andre Linker:

Math.com	http://www.math.com/
Mathteacher link	http://mtl.math.uiuc.edu/
Mathematics FFFFun	http://www.lifesmith.com/mathfun.html

Skolelaboratoriet i realfag http://www.matnat.uit.no/skolelab/